Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Avril-Durée:2h00
Partiel
2011-2012

Sujet proposé par: J.Saab
pour le centre d'enseignement de:
Beyrouth
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Examen Partiel
Analyse numérique matricielle - CSC104

1. Vous trouvez en annexe l'algorithme de factorisation d'une matrice inversible A en LU :
   (a) Calculer le nombre d'opérations nécéssaire pour réaliser une telle factorisation
   (b) Après avoir décomposer A en LU, calculer le nombre d'opérations nécéssaire pour résoudre un système $AX = b$ par la méthode de descente-remonté
   (c) Quelles sont les conditions sur A qui permettent:
      1. la factorisation de Cholesky?
      2. la factorisation en QR? Citer les avantages de chacune d'elles!
   (d) Application: Soit le système:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & -2y & & = & 1 \\ x & +y & -4z & = & 3 \\ & 4y & -2z & = & 6 \end{array}\right. \qquad (S)$$

      1. Vérifier que l'on peut utliser la méthode de factorisation LU pour résoudre le système (S)
      2. Donner L, U et résoudre (S) par la méthode de descente-remonté

---

2. Soit A une matrice réelle carrée de dimension n
   (a) Montrer que $||A||_2^2 = \rho(A^*A)$ avec $||.||_2$ est la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne, ρ désigne le rayon spectrale, A^* l'adjoint de A.
   (b) Monrer que si A est symétrique alors $cond(A) = \dfrac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$ avec $cond(A) = ||A||.||A^{-1}||$ est le conditionnement de A, λ_1, λ_n sont deux valeurs propres de A telles que

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$$

---

3. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

   (a) Donner la matrice itérative de Jacobi associée à A
   (b) Donner la matrice itérative de Gauss-Seidel associée à A
   (c) Vérifier que la méthode de Jacobi converge alors que celle de Gauss-Seidel diverge
   (d) Ecrire trois itérations de Jacobi

(e) Soit ω un paramètre réel, $L_\omega = (\frac{1}{\omega}D - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$ où $A = D - E - F$ avec D une matrice diagonale, E une matrice triangulaire inférieure, F une matrice triangulaire supérieure. Montrer que $\rho(L_\omega) \geq |\omega - 1|$ en déduire que la méthode de relaxation

$$x_{k+1} = L_\omega x_k + b^{'}$$

associée au système $Ax = b$, diverge si $\omega \in]0, 2[$.

Annexe: Algorithme de factorisation LU

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}$$

à l'étape k on pose $A_k = \widetilde{L}_k$ avec $\widetilde{L}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & \\ & \vdots & -\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{n,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & & & 1 \end{pmatrix}$; $L_k = L_k^{-1}$

$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{0} & \cdots & & & a_{1n}^{0} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & & 0 & a_{ij}^{(k)} & \\ 0 & & \vdots & & \end{pmatrix}$ avec $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}.a_{kj}^{(k-1)}.}{a_{kk}^{(k-1)}}$, $i, j = k+1 \cdots n$

à l'étape $n-1$, $A_{n-1} = \widetilde{L}_{n-1}. \cdots .\widetilde{L}_1.A_0$

$$A = \underbrace{L_1.L_2. \cdots .L_{n-1}}_{L}\underbrace{A_{n-1}}_{U}$$